Chap I : Programmation Linéaire

Introduction :

La recherche operationelle est un outils d'aide à la décision, la programmation linéaire fait partie de cette discipline, pour commencer à resoudre un problème on doit suivre 3 grandes étapes : Etape n°1 : Identification
Etape n°2 : La modélisation mathématique
Etape n°3 : La résolution

Et pour conclure et prendre des décision on fait une analyse postoptimal

Etape n°1 (Identification) :

Dans cette étape, on cherche à determiner les variables de décision sur lequelle on peut agir. En plus, de leur identification, on doit determiner leur type (entier, booleen (0 ou 1), réel, réel positif, etc ...)
on cherche à déterminer la fct objectif (d'interet) quand vise à optimisé (maximisation ou minimisation) et pour finir on doit déterminer les contraintes qui imposé sur le variable de décision (Exp: disponibilité, epuissement, etc...).

Exp1: une usine industriel fabrique 2 types de pièces mécanique (ou informatique) notés p1 et p2 qui sont vendu sur le marché à un prix respectives 100 DT et 150 DT la pièce. Pour fabriqué ces pièces l'usine utilise 2 matières primaire m1 et m2 qui sont disponible dans le stock avec des quantités respectives 250 Kg et 200 L. Les quantités necessaire pour produire une pièce p1 et une pièce p2 est resumé sur le tableau suivant :

Scanné avec CamScanner

	Qté/pièce p_1	Qté/pièce p_2	Qté disponible
m_1 Kg	20	15	250 Kg
m_2 litre	18	12	200 L

L'usine cherche à rentabiliser son activité. Identifier ~~l'étape 1~~ l'étape 1 et l'étape 2

Exp2: P_1 et P_2 sont deux cables informatiques. (même exp, en remplaçant Les pièces P_1 et P_2 par deux cables informetre)
(En lieu des pièce p_1 et p_2 en mètre)

Connection:

EXP1 :

* Étape 1: identification

- Les variables de décision : x = Le nbre des pièces p_1
  y = Le nbre de pièce p_2

=> x et y sont de type entier (par pièce)
x et $y \in \mathbb{N}$ => entière non divisible

- La fct objective : La rentabilité de l'activité est la fct:

$f(x,y) = 100.x + 150.y$ => on cherche à maximiser $f(x,y)$ / à x et y

=> Maximiser la fct $f(x,y)$ $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

- Contraintes :

. Disponibilité de la matière primaire :

* La qté de m_1 : necessaire pour produire $x(p_1)$ et $y(p_2)$, ne doit pas dépassé la qté disponible 250 Kg : $20x + 15y \leqslant 250$

* La qté de m_2 : utilisée pour produire $x(p_1)$ et $y(p_2)$, ne doit pas dépasser

Scanné avec CamScanner

200 L : $18x + 12y \leqslant 200$

Étape 2 : Modèl mathématique :

on cherche à maximiser $100x + 150y$, sous contrainte :

$$20x + 15y \leqslant 250$$
$$18x + 12y \leqslant 200$$

avec $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

Exp2 : (juste $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{N}$)

x = Longueur de p_1
y = Longueur de p_2

Exp3 :

	p1	p2	p3	p4
utilité	1	1	1,5	1,2
(Tonne) Poids	1,5	2	2,2	1,8
(m³) volume	1,2	1,3	1	0,8

Un camion de transporte 4 type de paquets p1, p2, p3 et p4 qui ont les caractéristiques suivant : utilité, poids et volume. on cherche que le quantité soit d'utilité maximale. Le camion va traversé un pont de charge maximale 15 Tonne Le camion ne doit partir que si le volume transporté est supérieur à 10 m³ Modéliser le problème.

Correction :

Scanné avec CamScanner

Etape 1 : Identification

- Les variables de décisions :
  - x_1 : nombre de paquet p1 $\in \mathbb{N}$
  - x_2 : nombre de paquet p2 $\in \mathbb{N}$
  - x_3 : nombre de paquet p3 $\in \mathbb{N}$
  - x_4 : nombre de paquet p4 $\in \mathbb{N}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$

- La fonction objectif : $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 1,2x_4$

on cherche de maximiser $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 et x_4.

- Contraintes :
  - La charge maximale de camion ne doit pas dépasser 15 tonnes :

$$1,5x_1 + 2x_2 + 2,2x_3 + 1,8x_4 \leq 15$$

  - Le volume transporté doit être supérieur à 10 m^3 :

$$1,2x_1 + 1,3x_2 + x_3 + 0,8x_4 \geq 10$$

Etape 2 : Modélisation mathématique

on cherche à maximiser la fct $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ telque

$\max_{x_1, x_2, x_3, x_4} x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 1,2x_4$ sous contrainte :

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 + 2,2x_3 + 1,8x_4 \leq 15 \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 + 0,8x_4 \geq 10 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1 \in \mathbb{N} \\ x_2 \in \mathbb{N} \\ x_3 \in \mathbb{N} \\ x_4 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Exp 4 :

Avec le même énoncé de l'exercice précédent, on cherche à transporté le plus ~~d'un paquets~~ possible des paquets de telle façons que l'utilité de paquet ~~transporté~~ soit supérieur à 12, le volume totale soit supérieur à 10 et le poids doit être inferieur ou égale à 15.

Donner le model mathématique.

connection :

- La f° objectif : $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i$

on cherche de maximiser $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ "/. à x_1, x_2, x_3 et x_4.

- contraintes :

  • La charge maximale de camion ne doit pas dépasser 15 tonnes :

$$1,5x_1 + 2x_2 + 2,2x_3 + 1,8x_4 \leqslant 15$$

  • L'utilité des paquets doit dépassé 12 : $x_1 + x_2 + 15x_3 + 12x_4 \geqslant 12$

  • Le volume transporté doit être supérieur à 10 m^3.

$$1,2x_1 + 1,3x_2 + x_3 + 0,8x_4 \geqslant 10$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max \sum_{i=1}^{4} x_i \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \\ \text{S.C :} \quad 1,5x_1 + 2x_2 + 2,2x_3 + 1,8x_4 \leqslant 15 \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 + x_3 + 0,8x_4 \geqslant 10 \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 1,2x_4 \geqslant 12 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{N} \\ x_2 \in \mathbb{N} \\ x_3 \in \mathbb{N} \\ x_4 \in \mathbb{N} \end{array}$$

Exp5 : Exercice (Problème de sac à dos)

Un voyageur dispose n objets différents nommée objet 1 jusqu'à objet n et chaque objet est caractérisé par l'utilité notée U_i et son poids P_i.

i allant de 1 jusqu'à n

Scanné avec CamScanner

Durant son voyage, il utilise un sac à dos de charge maximal de 15 Kg
Donner le modèle mathématique qui permet que le voyage soit satisfaite

Correction :

Étape 1 (Identification)

- Les variables de décisions : x_1 : Présence de l'objet 1 $\in$ boolean $\begin{pmatrix} 0 : \text{à laisser} \\ 1 : \text{à prendre} \end{pmatrix}$
x_2 : Présence de l'objet 2 $\in$ boolean
$\vdots$
x_n : Présence de l'objet n $\in$ boolean

- La fonction objet : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$
on cherche de maximiser $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\forall$ à $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Les contraintes :
  - La charge maximale de sac à dos ne doit pas dépasser 15 Kg :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant 15$$

Étape 2 : Modélisation mathématique

$$\begin{cases} \max_{x_1, \dots x_n} (f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \max_{x_1, x_2, \dots x_n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \right) \\ \text{S.C :} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant 15 \\ \text{avec} \begin{cases} x_1 \in \text{boolean} \\ x_2 \in \text{boolean} \\ \vdots \\ x_n \in \text{boolean} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 : \text{à laisser} \\ 1 : \text{à prendre} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Exp 6 :

Le voyageur veut prendre le maximum d'objet possible et de s'assurer que l'utilité dépasse 10 en respectant la charge maximale de sac à dos.
Donner le model mathématique.

Correction :

- La fct objectif : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

on cherche de minimiser $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$

- contraintes :
  - La charge maximale de sac à dos ne doit pas dépasser 15 Kg :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq 15$$

  - l'utilité : $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \geq 10$ (dépasse 10.)

Etape 2 :

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1, \dots, x_n} \left(f(x_1, \dots x_n) \right) = \min\limits_{x_1, \dots, x_n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \\ \text{S.C} \\ \text{avec} \begin{cases} x_1 \in \text{booleen} \ (0 : \text{laisser}) \\ x_2 \quad // \quad (1 : \text{prendre}) \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n \quad // \end{cases} \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \geq 10$$

Resolution d'un Programme linéaire :

on résout un Programme linéaire sur un domaine, le domaine de resolution est définit par les contraintes, ce domaine à deux possibilité, être vide ou non vide. Si le domaine sur lequel on doit resoudre est vide on dit

Scanné avec CamScanner

que le problème réalisable. si le domaine est vide le problème est non réalisable.

Dans l'espace, Chaque contrainte définit un demi-espace délimité par hyperplan qu'on l'appelle d_i. Le domaine de réalisation où le variable cherché verifiant toute les contraintes en même temps est obtenu par l'intersection de domaine d_i.

-1- Résolution graphique:

Dans le cas d'un programme linéaire à 2 variable, on commence par tracer le droite qui sont obtenu en remplaçons les contrainte d'inégalité par des égalités. Ensuite, on obtient le domaine, Le domaine de réalisation c'est l'intersection de ces derniers, si l'intersection est non vide on trace une droite définit par la f° objectif égale à constante En suite, on faisons augmenter cette cste on va tracer des droites parallèles à cette première droite (on faisons augmenter la cst dans le cas de maximisation, on va abaisser cette cst dans le cas de minimisation)

La solution du Programme linéaire est obtenu au dernier point d'intersection du domaine de réalisabilité avec la droite définit par la f° objectif.

Exemple:

1) $\begin{cases} \max_{x,y} Z = 4x + 3y \\ \text{s.c} \\ 2x - y \leq 2 \\ 3x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$ (8)

2) $\begin{cases} \min_{x,y} 4x + 3y \\ 2x - y \leq 2 \\ 3x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$

$Z(0,2) = 4 \times 0 + 3 \times 2$

$Z_{max} = 6$

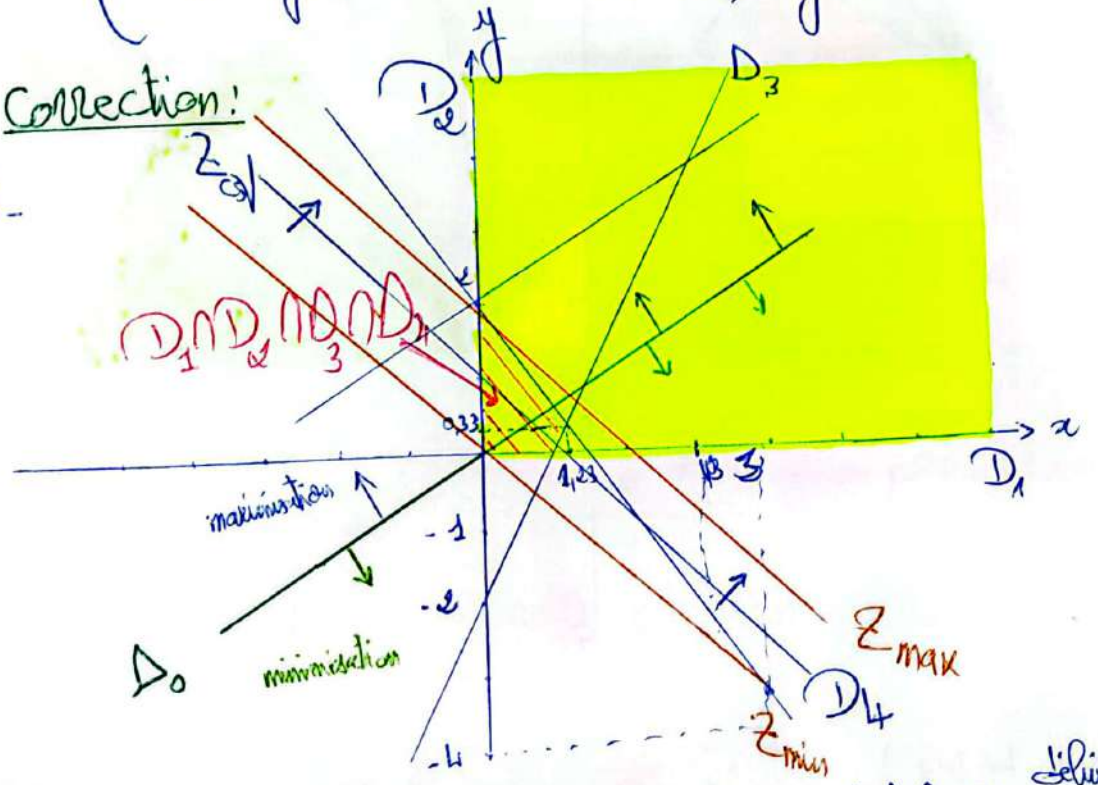
Scanné avec CamScanner

3) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+3y \\ \text{S.C} \\ 2x-y \geq 2 \\ 3x+2y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+3y \\ 2x-y \not\leq 2 \\ 3x+2y \not\leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+3y \\ \text{S.C} \\ 2x-y \leq 2 \\ 3x+2y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Correction :



* $x \geq 0$ → définit le domaine D_1 : c'est le demi plan délimité par la droite $x = 0$ → partie à droite

* $y \geq 0$ → définit le domaine D_2 : c'est le demi plan délimité par la droite $y = 0$ → partie haute

* $2x - y \leq 2$ → définit le domaine D_3 : c'est le demi plan délimité par la droite $2x - y = 2$ → partie haute

* $3x + 2y \leq 4$ → définit le domaine D_4 : c'est le demi plan délimité par la droite $3x + 2y = 2$ → partie basse

* $\Delta_0 : 4x + 3y = 0$

$Z(0,2) = 4 \times 0 + 3 \times 2 = 6$

$Z(0,0) = 0$

$Z\left(1,2 ; \frac{1}{3}\right) = 1,2 \times 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 5,8$

$Z(1,3, 0) = 4 \times 1,3 + 30 = 5,2$

$Z_{max} = 6 = Z^* = Z(x^*, y^*)$

Scanné avec CamScanner

2) $D_0 : 4x + 3y = 0$ $\quad Z(1,4 ; 0,28) = 5,4$

$Z_{max} = 6 = Z(0,2)$

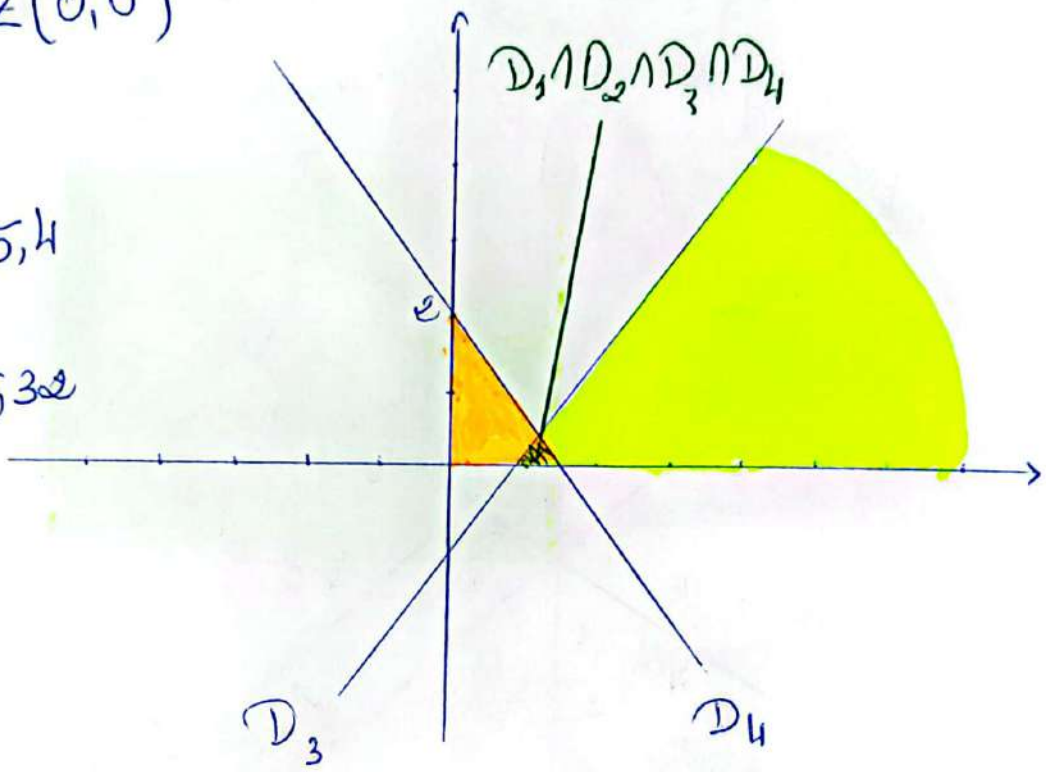
$Z_{min} = 0 = Z(0,0)$

3) (borné)

$Z(1,04 ; 0,48) = 5,4$

$Z(1,0) = 4$

$Z(1,33,0) = 5,32$

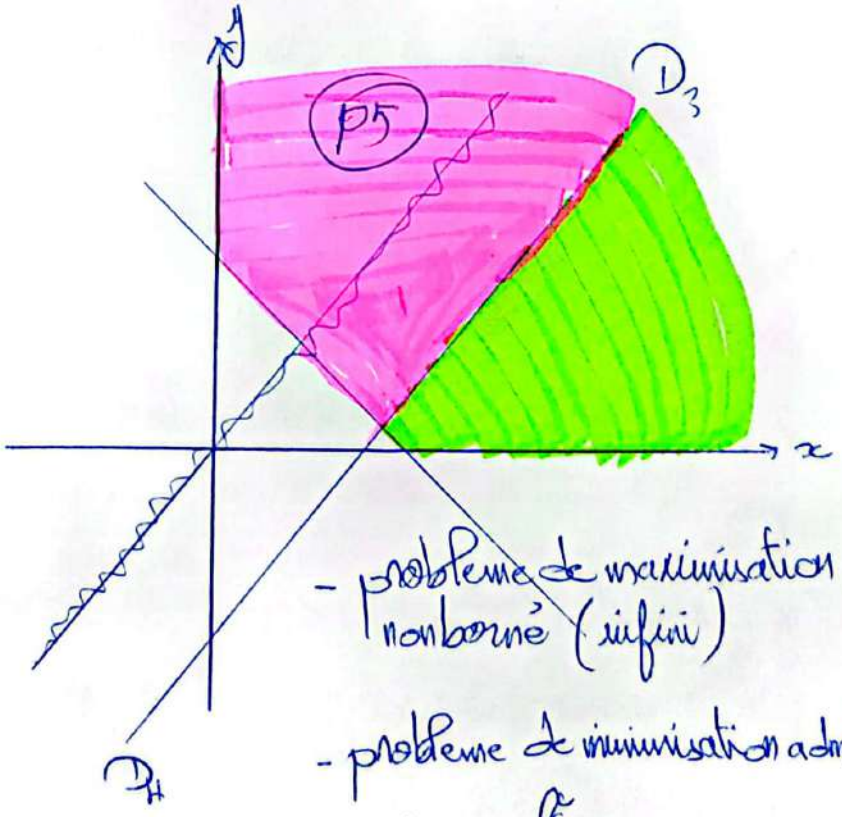


$Z_{max} = 5,4$

$Z_{min} = 4$

4) (domaine non borné)

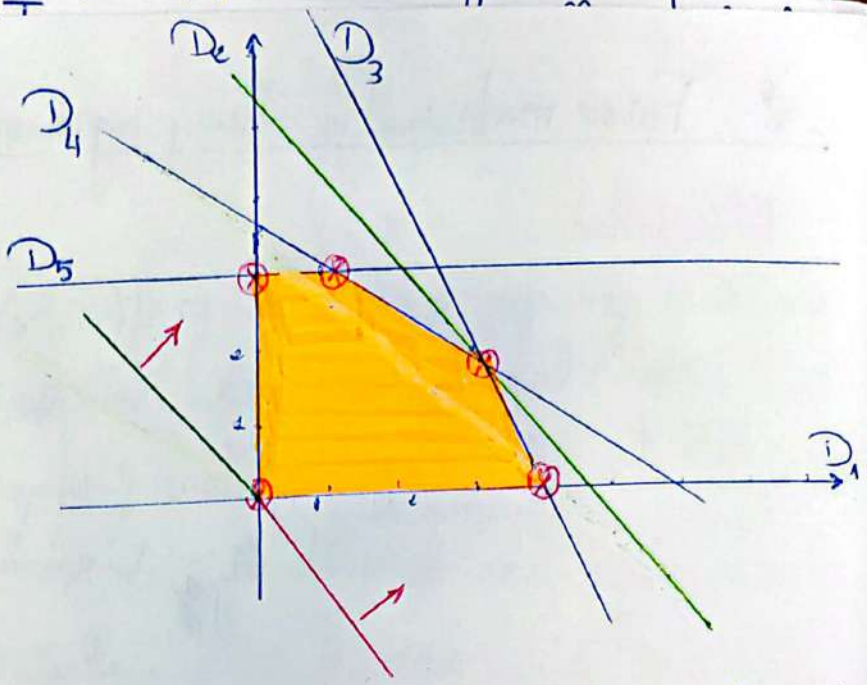
5)



- problème de maximisation non borné (infini)
- problème de minimisation admet une unique sol

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \max\ 4x+5y \\ x,y \\ \text{S.C} \\ \quad 2x+y \leqslant 8 \\ \quad x+2y \leqslant 7 \\ \quad y \leqslant 3 \\ \quad x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \end{cases}$$



- $x \geqslant 0$ → définit le domaine D_1 : c'est le demi plan délimité par la droite $x = 0$ → partie à droite
- $y \geqslant 0$ → définit le domaine D_2 : c'est le demi plan délimité par la droite $y = 0$ → partie haute
- $2x+y \leqslant 8$ → définit le domaine D_3 : c'est le demi plan délimité par la droite $2x+y=8$ → partie
- $x+2y \leqslant 7$ → définit le domaine D_4 : c'est le demi plan délimité par la droite $x+2y=7$ → partie
- $y \leqslant 3$ → définit le domaine D_5 : c'est le demi plan délimité par la droite $y = 3$ → partie basse.

$(0,0)$; $(4,0)$; $(0,3)$; $(1,3)$; $(3,2)$

* $D_0 : 4x+5y=0$; graphiquement : $x^* = 3$; $y^* = 2$; $Z^* = 22$
* $Z(0,0)=0$; $Z(4,0)=16$; $Z(0,3)=15$; $Z(1,3)=19$; $Z(3,2)=22$
* La solution du programme linéaire, c'est $Z^*=22$ atteinte pour $x^*=3$ et $y^*=2$

Scanné avec CamScanner

- 2 - Forme matricielle d'un programme linéaire:

Exemple:

une usine fabrique n produits p_i ($i \in [\![1..n]\!]$) vendu à un prix c_i. Durant la production l'usine utilise m ressource disponible avec des quantité b_i ($i \in [\![1..m]\!]$). Pour fabriqué une unité du produit P_i, l'usine utilise une quantité a_{ij} de ressource ($j \to 1$ jusqu'a m, $i \to 1$ jusqu'a n)

Écrire le modèle.

Correction:

- on va noté x_i nombre d'unité produite pour le produit p_i
- La fct objectif c'est le prix de vente total : $Z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
- Les contraintes

la qté utilisé de la ressource j (j de 1 à m) pour produire

$$x_1/p_1 \dots x_n/p_n = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq B_j$$

B_j : La qté disponible

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,\dots,x_n} Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s.c} \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \text{avec } x_1 \geq 0 \dots x_n \geq 0 \end{cases}$$

Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Scanné avec CamScanner

$$Z(x_1, \dots, x_n) = C^T \cdot X \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

(PL) sous la forme matricielle

$$\begin{cases} \max\limits_{x} \ C^T X \\ \text{sc} \\ Ax \leq b \\ \text{avec } x \geq 0 \end{cases}$$

- forme canonique d'un programme linéaire.

Un programme linéaire est sous forme matricielle (..... standard) si il est sous la forme $Ax = b$ et $x \geq 0$

E Remarque :

* Toujours il est possible de passé d'un problème de minimisation à un problème de maximisation avec un signe (-).

$$\min C^T X \iff \max -C^T X$$
$$\max C^T X \iff \min -C^T X$$

* Pour les variables : si $x_i \in \mathbb{R}^-$ on pose $y_i := -x_i$ et on remplace x_i par $-y_i$ dans tous les problème avec $y_i \in \mathbb{R}^+$

* si $x_i \in \mathbb{R}$ alors $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+ \in \mathbb{R}_+$ et $x_i^- \in \mathbb{R}_+$

* pour passer d'une contrainte de $\geq$ à une contrainte $\leq$ il faut multiplié de toute les contraintes de deux côtés par signe "-"

Scanné avec CamScanner

* pour passer d'une contrainte d'égalité, chaque contrainte d'égalité est remplacé par deux contraintes l'une est $\leqslant$ et l'autre $\geqslant$

c-à-d si $a = b \iff \begin{cases} a \geqslant b \\ \text{et} \\ a \leqslant b \end{cases}$

* pour passer d'une contrainte $\leqslant$ à une contrainte d'égalité il suffit d'ajouté une variable d'écart positif.

c-à-d si $a \leqslant b \Rightarrow a + e = b$

$e \geqslant 0$: variable d'écart

Exercice:

Reprenant l'exemple precedant:

1) Donner la forme matriciel canonique et la forme matriciel standard.

Reponse:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+5y \\ \text{S.C} \quad 2x+y \leqslant 8 \\ \quad x+2y \leqslant 7 \\ \quad y \leqslant 3 \\ \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

- Le système est déja sous forme canonique,
- forme standard:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+5y+0e_1+0e_2+0e_3 \\ 2x+y+e_1 = 8 \\ x+2y+e_2 = 7 \\ y+e_3 = 3 \end{cases}$$

avec $e_1, e_2, e_3 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

EK: à question pour ces:

1) $\begin{cases} \min 4x-5y \\ \text{S.C} \\ x+2y \geqslant 4 \\ 2x-2y \leqslant 3 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} x+2y \\ \text{S.C} \\ x+4y \leqslant 2 \\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} x+2y \\ \text{S.C} \\ x+4y \geqslant 2 \\ x \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

4) $\begin{cases} \min\limits_{x,y} x+2y \\ \text{s.c} \\ x+4y \geq 1,2 \\ x-y=1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

correction

- 1 - forme canonique :

$\begin{cases} \max\limits_{x,y} 5y-4x \\ \text{S.C} \\ -x-2y \leq -4 \\ 2x-2y \leq 3 \\ \text{avec } x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

forme standard $\begin{cases} \max\limits_{x,y} 5y-4x \\ \text{S.C} \\ -x-2y+e_1=-4 \\ 2x-2y+e_2=3 \\ \text{avec } x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, \end{cases}$

- 2 - forme canonique :

on pose $z=-y \geq 0$

$\begin{cases} \max\limits_{x,y} x-2z \\ \text{S.C: } x-4z \leq 2 \\ x \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$

forme standard $\begin{cases} \max\limits_{x,y} x-2z \\ \text{S.C} \\ x-4z+e=2 \\ x \geq 0, z \geq 0, e \geq 0 \end{cases}$

- 3 - forme canonique :

soit $x=x^+-x^-$ tel que $x^+ \in \mathbb{R}^+ ; x^- \in \mathbb{R}^+$

F.C: $\begin{cases} \max\limits_{x^+,x^-,y} x^+-x^-+2y \\ \text{s.c } x^+-x^--4y \leq -2 \\ x^+ \geq 0, x^- \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

F.S $\begin{cases} \max\limits_{x^+,x^-,y} x^+-x^-+2y \\ \text{S.C } -x^++x^--4y+e_1=-2 \\ x^+ \geq 0, x^- \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

-4-
$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} -x-2y \\ \text{S.C} \\ -x-4y \geq -2 \\ x-y \geq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Forme canonique :
$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} -x-2y \\ \text{S.C} \\ -x-4y \leq -2 \\ -x+y \leq -1 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :
$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} -x-2y \\ \text{S.C} \\ -x-4y+e_1 = -2 \\ -x+y+e_2 = -1 \\ x-y+e_3 = 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$

-3- Base et base réalisable :

Considérons un Programme linéaire mais sous la forme matriciel standard suivant :
$$\begin{cases} \max\limits_{X} C^T X \\ \text{S.C} \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $\quad (m \leq n)$

on appelle **base** un ensemble de m élement (de cardinal m) formé par les indices de vecteur colonne de A et la sous matrice A_B

$B = \{1 \dots m\}$ (choix m élément) $\quad (m \leq n)$

A_B : sous matrice extraite de A si A_B inversible alors B est une base standard

Scanné avec CamScanner

* Le complémentaire de B dans l'ensemble $\{1..n\}$ (les autres reste) d'indice H.

$A = (A_B \; A_H)$; $X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_H \end{pmatrix}$

• $X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix}$ associé à B est dite solution de Base réalisable (si elle doit vérifié tout les contraint)

$$\begin{cases} X_B = A_B^{-1} \cdot b \geq 0 \\ X_H = \vec{0} \end{cases}$$

Remarque :

• Dans le cas d'un domaine borné fermé (domaine définie par la contrainte)

• La forme géométrique est un polyèdre (des sommet et arrêt (plus que 2 arrêt)). domaine des x qui définie les contrainte

• La résolution d'un programme linéaire consiste à se déplacer d'un sommet à un autre sommet adjacent en cherchant la condition d'optimalité. (realisable)

• Chaque sommet est associé a une base B.

• 2 sommets adjacents associé à B et B' de base si B et B' se defini d'un seul élement.

Ex :

Revenons à l'exemple précedent, donner la forme matriciel standard et verifier qu'il est réalisable.

Scanné avec CamScanner

2) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+5y \\ 2x+y \leq 8 \\ x+2y \leq 7 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 1) $\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+5y \\ 2x+y \leq 8 \\ x+2y \leq 7 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Correction

-1-

-2-

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y,e_1,e_2,e_3} 4x+5y+0e_1+0e_2+0e_3 \\ 2x+y+e_1=8 \\ x+2y+e_2=7 \\ y+e_3=3 \\ x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

si $B = (3, 4, 5)$ $\quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$ c'est une solution de Base réalisable

≤ 0 ce n'est pas sol^{o} de Base réalisable.

Condition d'optimalité :

$$A = (A_B A_H) \quad X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_H \end{pmatrix}$$

$$AX = b = (A_B A_H) \begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix} = A_B X_B + A_H X_H$$

$$\Rightarrow X_B = A_B^{-2} (b - A_H X_H) = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_H X_H$$

Scanné avec CamScanner

$$Z = C^T X = \begin{pmatrix} C_B \\ C_H \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix} = C_B^T X_B + C_H^T X_H$$

$$= C_B^T A_B^{-1} b - C_B^T A_B^{-1} A_H X_H + C_H^T X_H$$

$$= C_B^T A_B^{-1} b + \left(C_H^T - C_B^T A_B^{-1} A_H\right) X_H$$

La condition d'optimalité (maximisation) : $\tilde{C}_H^T = C_H^T - C_B^T A_B^{-1} A_H \leq 0$ (Vecteur)

Méthode de dictionnaire :

Supposons qu'on a réperer une base réalisable comme initialisation, on va chercher la sommet adjacent. Pour cela, Parmi les composantes de la hors base on va chercher une composante dite la variable entrante.

EXP :

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+5y \\ \text{S.C} \quad 2x+3y \leq 18 \\ \quad x+2y \leq 7 \\ \quad y \leq 3 \\ \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max\limits_{x,y} 4x+5y+0e_1+0e_2+0e_3 \\ \text{S.C} \quad 2x+3y+e_1 = 8 \\ \quad x+2y+e_2 = 7 \\ \quad y+e_3 = 3 \\ x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$B = (3,4,5)$, $H = (1,2)$ $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow e_1 = 8,\ e_2 = 7,\ e_3 = 3$

$Z(0,0,8,7,3) = 0$

$C_2 > C_1 \quad (5 > 4)$

on choisie que les variable de hors base qui ont coefficient strictement positive, on compare les $\frac{e_i}{a_i}$ qui sont strictement positive et $i \in H$

Scanné avec CamScanner

- La variable entrante : y
- on va chercher la variable sortante

$\Leftrightarrow$ on va chercher x_j (ou $j \in B$) dite variable sortante

$$\begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y = 8 - y \\ e_2 = 7 - x - 2y = 7 - 2y \\ e_3 = 3 - y = 3 - y \end{cases} \quad (x = 0) \quad \text{variable hors base} \quad \begin{cases} e_1 = 8 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 8 \\ e_2 = 7 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 7 \\ e_3 = 3 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{y = 3}$ variable optimale $\qquad \boxed{e_3 = 0}$

Donc la variable sortante : e_3

La variable sortante c'est la variable qui a : b_i / a_{ie} le plus petit (avec $i \in B$)

e : indice de la variable entrante

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (e \downarrow)$$

à condition que $a_{ie} \neq 0$ et $b_i > 0$

variable entrante : y, $a_{ie} = (1; 2; 1)$

$\left(\frac{b_1}{a_{1e}}, \frac{b_2}{a_{2e}}, \frac{b_3}{a_{3e}}\right) = \left(\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{3}{1}\right)$; $\min = \frac{3}{1} \Rightarrow$ variable sortante c'est e_3

$B = (3, 4, 2)$ $\quad (e_1\ e_2\ y)$

$H = (1, 5)$ $\quad (x\ e_3)$, $x = 0$ et $e_3 = 0$

$\begin{cases} e_1 = 5 \\ e_2 = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ $\quad Z(0, 3, 5, 1, 0) = 15$; on va écrire Z en fct des variable hors base : $y + e_3 = 3 \Rightarrow y = 3 - e_3$

donc $Z = 4x + 5y = 4x + 5(3 - e_3) = 15 + 4x - 5e_3$

Scanné avec CamScanner

on va chercher la variable entrante c'est x car a le coefficient le plus grand et >0 : 4

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} 15 + 4x - 5e_3 \\ \text{S.C} \quad 2x + 3 - e_3 + e_1 = 8 \\ \quad x + 2(3 - e_3) + e_2 = 7 \\ \quad (3 + e_3 + e_3 = 3) \\ x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max\limits_{x,y} 15 + 4x - 5e_3 \\ \text{S.C} \quad 2x + e_1 - e_3 = 5 \\ \quad x + e_2 - 2e_3 = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (e_3 = 0) \\ 2x + e_1 = 5 \\ x + e_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 = 5 - 2x \geq 0 \\ e_2 = x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

alors la variable sortante est e_2

$B = (3, 1, 2)$ (e_1, x, y)

$H = (4, 5)$ (e_2, e_3)

$$\begin{cases} x = 1 \\ e_1 = 5 - 2 = 3, \quad y = 3 \\ e_2 = 1 - 1 = 0, \quad x = 1 \\ e_3 = 0 \end{cases}$$

$Z(1, 3, 3, 0, 0) = 15 + 4(1 - e_2) + 5e_3 = 19$

$Z = 19$

on a $C_4 = 4$, $C_5 = -5$ les 2 coefficients sont strictement négatives

$\Rightarrow$ Condition d'optimalité ($Z_{max} = 19$, où $x^* = 1$, $y^* = 3$, $e_3^* = 0$, $e_2^* = 0$, $e_1^* = 1$)

Exercice :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2, x_3} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{S.C} \\ \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ \quad 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

21

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} 5x_1+4x_2+3x_3+0\times e_1+0\times e_2+0\times e_3 \\ \text{avec } x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \\ e_1\geq 0,\ e_2\geq 0,\ e_3\geq 0 \\ \underline{SC} \\ 2x_1+3x_2+x_3+e_1=5 \\ 4x_1+x_2+2x_3+e_2=11 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+e_3=8 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 \text{ est inversible, donc B est une base}$$

$B=(4,5,6)$

$H=(1,2,3)$

$$X_B=A_B^{-1}.b=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}\geq 0 \quad ; \quad X_H=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\overline{0}$$

$X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix}$ est une solution de base réalisable

$C=\begin{pmatrix} C_B \\ C_H \end{pmatrix}$ avec $C_B=\begin{pmatrix} c_{e_1} \\ c_{e_2} \\ c_{e_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_H=\begin{pmatrix} c_{x_1} \\ c_{x_2} \\ c_{x_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overline{C}_H^T=C_H^T-C_B^T A_B^{-1} A_H=(5,4,3) \not\leq 0$$

$\Rightarrow$ La solution de base n'est pas optimale

La variable entrante x_1 car $C_{x_1}>C_{x_2}>C_{x_3}$

on va chercher la variable $C_{x_1}>0$

$$\begin{cases} e_1=5-2x_1\geq 0 \\ e_2=11-4x_1\geq 0 \\ e_3=8-3x_1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1\leq \frac{5}{2} \\ x_1\leq \frac{11}{4} \\ x_1\leq \frac{8}{3} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$x_1 = 2,5$

$e_1 = 0$ variable sortante

$B = (x_1, e_2, x_3)$

$H = (e_1, x_2, x_3)$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ e_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{e_1}{2}$$

$Z = 5\left(\frac{5}{2} - \frac{e_1}{2}\right) + 4x_2 + 3x_3 = 12,5 - 2,5e_1 + 4x_2 + 3x_3$; on va calculer la condition d'optimalité

$$C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_H \end{pmatrix} \text{ avec } C_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad C_H = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\max_{x_1,x_2,x_3} 12,5 - 2,5e_1 + 4x_2 + 3x_3$

S.C

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{pmatrix}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_B^T = (0\ 0\ 0)$ $C_H^T = (-2,5\ 4\ 3)$

$$\bar{C}_H^T = C_H^T - C_B^T A_B^{-1} A_H = \left(-\frac{5}{2}, 4, 3\right) \not\geq 0 \Rightarrow$$ La sol courante n'est pas optimale.

La variable entrante x_2

$$\begin{cases} \max_{x_1,x_2,x_3} 12,5 - 2,5e_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{S.C} \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{5-3x_2}{2} \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 + e_2 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_3 = 8 \end{cases}$$

$x_3 = 0$, $e_1 = 0$

$e_2 = 4 \cdot \frac{5-3x_2}{2} + 11 - x_2 = 1 - 7x_2 \geq 0$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow e_3 = 8 - 3\left(\frac{5-3x_2}{2}\right) - x_4\left(1-7x_2\right) - 4x_2$$

$$= 8 - \frac{15}{2} + \frac{9}{2}x_2 - 4 + 28x_2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2$$

$$\Rightarrow e_3 = 8 - \frac{15}{2} + \frac{9}{2}x_2 - 4x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5-3x_2}{2} \geq 0 \\ 1 - 7x_2 \geq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq \frac{5}{3} \\ x_2 \leq \frac{1}{7} \\ x_2 \geq -1 \end{cases}$$

-4- Simplexe par Tableau

Considerons un programme lineaire mis sous la forme standard (c-à-d qu'on a max, $\underset{x \geq 0}{Ax=b}$)

$$\begin{cases} \max C^T x \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \max_x C^T x \\ \text{s.c} \\ Z - C^T x = 0 \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

nom de variable / variable de base	Z	x_1	.....	x_n	b
base	0				b_1
	⋮		A		⋮
	0				b_n
Z	1	$-e_1$	.....	$-e_n$	0

finale

sous

Scanné avec CamScanner

Dans l'exemple précédent :

pivot ←

↓ e

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b
e_1	0	2	3	1	1	0	0	5
e_2	0	4	1	2	0	1	0	11
e_3	0	3	4	2	0	0	1	8
Z	1	-5	-4	-3	0	0	0	0

s ←

(si les variable <0 donc on s'arrête non borné (il faut que tous >0))

le plus petit valeur négative

(si pas des variables entrante, donc il est optimale)

pas des var. negative

↓ e

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b
x_1	0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	2,5
e_2	0	0	-5	0	-2	1	0	1
e_3	0	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	0,5
Z	1	0	7/2	-1/2	5/2	0	0	12,5

L_1
L_2
s ← L_3
L_4

pivot ←

Faire apparaître des "0"

donc

$L_1 \leftarrow L_1 / \text{Pivot}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + 5L_1$

La base courant : (e_1, e_2, e_3) } ⇒ La sol° de base courante est réalisable.

$X_B = A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \geq 0$

$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq 0$ ⇒ donc la sol° courante n'est pas ~~réalisable~~ optimale.

La variable entrante est la variable ayant le plus petit coef <0 dans la dernière ligne.

Scanné avec CamScanner

$H = (x_1, x_2, x_3)$ $e_1 = 5$; $e_2 = 11$; $e_3 = 8$ $Z = 0$ pivot $= 2$

$s = e_1$

Pour obtenir le nouveau tableau à partir de l'ancien tableau.
on commence par remplacer le nom de variable sortante par le nom de la variable entrante. Ensuite, la ligne de la variable sortante (nouveau tableau) $L_s^{nouv} \leftarrow L_s^{nouv} / pivot$

$$L_i^{nouv} \leftarrow L_i^{ancc} - a\, L_s^{nouv}$$

base $= (x_1, e_2, e_3)$

hors base $= (e_1, x_2, x_3)$ $x_1 = 2,5$; $e_2 = 1$; $e_3 = 7$

$e_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$

$Z = 12,5$

Parmis les coef de dernière ligne on a: $(-\frac{1}{2})$ un coef < 0

$\Rightarrow$ La sol^{n} n'est pas optimale.

$\Rightarrow$ La variable entrante e_3 (l'unique qui a le coef négatif < 0)

	z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b
x_1	0	1	2	0	2	0	-1	2
e_2	0	0	-5	0	-2	1	0	1
x_3	0	0	-1	1	-3	0	2	1
z	1	0	3	0	1	0	1	13

Scanné avec CamScanner

$L_3 \leftarrow L_3 / 1/2$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3 \quad L_2 \leftarrow L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2} L_3$

$\Rightarrow$ tout les coef de derniere ligne sont positive ≥ 0.

$\Rightarrow$ Donc la sol° est optimale

EX: $Z + (3x_2 + e_1 + e_3)$

EX: Résoudre par simplexe.

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2} \; 20x_1 + 10x_2 \\ \text{S.C} \quad x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 100 \\ \quad x_1 \leq 70 \\ \quad x_2 \leq 50 \\ \quad x_1 \geq 0 \; , x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{F.S.} \begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2} 20x_1 + 10x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 + e_1 = 120 \\ x_1 + x_2 + e_2 = 100 \\ x_1 + e_3 = 70 \\ x_2 + e_4 = 50 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ Z - 20x_1 - 10x_2 - 0e_1 + 0e_3 + 0e_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b	
e_1	0	1	2	1	0	0	0	120	
e_2	0	1	1	0	1	0	0	100	
e_3	0	1	0	0	0	1	0	70	
e_4	0	0	1	0	0	0	1	50	
Z	1	-20	-10	0	0	0	0	0	

Pivot

Scanné avec CamScanner

La base courante (e_1, e_2, e_3, e_4)

$X_B = A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ base réalisable

$x_1 = x_2 = 0 \quad Z = 0$

$\begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq 0 \Rightarrow$ Sol$^{\text{o}}$ n'est pas optimale

(-20) est la valeur la plus petite < 0 de la dernière ligne

donc x_1 est la valeur entrante.

$\min \{ b_i / a_{ie} \} = 70$ donc e_3 est la variable sortante

d'où $B = (e_1, e_2, x_1, e_4)$

pivot

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b
e_1	0	0	2	1	0	-1	0	50
e_2	0	0	1	0	1	-1	0	30
x_1	0	1	0	0	0	1	-1	70
e_4	0	0	1	0	0	0	1	50
Z	1	0	-10	0	0	20	0	1400

$L_3 \leftarrow L_3 / \text{Pivot}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_4 \leftarrow L_4$
$L_5 \leftarrow L_5 + 20 L_3$

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b
x_2	0	0	1	1/2	0	-1/2	0	25
e_2	0	0	0	-1/2	1	1/2	0	5
x_1	0	1	0	0	0	1	0	70
e_4	0	0	0	-1/2	0	1/2	1	25
Z	1	0	0	5	0	15	0	1650

$L_1 \leftarrow L_1 / \text{pivot}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
$L_5 \leftarrow L_5 + 10 L_1$

Scanné avec CamScanner

initial surtout si on a des coefficient au second membre qui sont nulles ou négatives (on parle de problème d'initialisation de programme linéaire) Donc comment chercher une initialisation de programme linéaire

5- Simplex à deux phase :

La methode de simplex à deux phases permet de resoudre un Programme linéaire si ce possible. Il est composé par 2 étapes : Une premier étape dite phase 1 dans la quelle on construire un programme linéaire auxiliaire à partir d'un programme linéaire initial, la résolution du programme linéaire auxiliaire permet d'avoir une initialisation du programme linéaire initial si ce possible. Une deuxième étape qu'on peut la commencer ssi l'étape de phase 1 se déroule correctement.

. Construction d'un programme linéaire auxiliaire :

À partir du programme linéaire initial mise sous la forme standard; à chaque égalité qui à un second membre inferieur ou égale à 0, on ajoute une variable artificielle a_i avec un signe (−) c-à-d $-a_i$ au premier membre de l'egalité, les variable auxitiaire ajouté sont positive

La fct objectif du programme linéaire auxiliaire est égale à la somme des Var artificielle, on cherche à minimiser.

(minimiser prog lin auxiliaire)

Scanné avec CamScanner

tous les coef de la dernière ligne sont positifs donc cette solution courante est optimale avec $Z_{max} = 1650$

$B = (x_2, e_2, x_1, e_4)$ $\begin{cases} x_2 = 25 \\ e_2 = 5 \\ x_1 = 70 \\ e_4 = 25 \end{cases}$

EX : $\begin{cases} \max\ 3x_1 - x_2 \\ \text{S.C} \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

1/ Forme standard

2/ Resoudre

Correction :

-1- Forme standard : $\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2} 3x_1 - x_2 + 0.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 \\ -2x_1 - x_2 + e_1 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ e_1 \geq 0\ ,\ e_2 \geq 0\ ,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	0	-2	-1	1	0	0	-2
e_2	0	1	3	0	1	0	2
e_3	0	0	1	0	0	1	4
Z	1	-3	1	0	0	0	0

$B = (e_1, e_2, e_3)$

$X_B = A_B^{-1}.b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \not\geq 0$

$\Rightarrow$ La base n'est pas réalisable.

Remarque :

Il n'est pas toujours pas evident que de trouver une base réalisable

Scanné avec CamScanner

$$PLI \begin{cases} \max\ 3x_1 - x_2 + 0.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 \\ -2x_1 + x_2 + e_1 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$PLA \begin{cases} \min\ (a_1) \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1 \\ \underline{S.C} \\ -2x_1 + x_2 + e_1 - a_1 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ a_1 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$B = (a_1, e_2, e_3)$; $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\Rightarrow$ Base realisable pour PLA.

PLI
$B = (e_1, e_2, e_3)$
$A_B = I_3$; $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$A_B^{-1} \cdot b \not\geq 0$ $\Rightarrow$ Base non réalisable pour PLI

Ex:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y}\ 4x + 5y = Z \\ \underline{S.C} \\ -2x + y \leq -4 \\ x - 2y \leq -2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

-1- Forme standard
-2- PLA

Correction:

1. F.S

$$PL1 \begin{cases} \max\ 4x + 5y + 0.e_1 + 0.e_2 \\ \underline{S.C} \\ -2x + y + e_1 = -4 \\ x - 2y + e_2 = -2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

- 2 PLA $\begin{cases} \min_{x,y,e_1,e_2,a_1,a_2} (a_1+a_2) \\ -2x+y+e_1-a_1=-4 \\ x-2y+e_2-a_2=-2 \\ x\geq 0, y\geq 0, e_1\geq 0, e_2\geq 0, a_1\geq 0, a_2\geq 0 \end{cases}$

PLA(F.S) $\begin{cases} \max (-a_1-a_2) \\ 2x-y-e_1+a_1=4 \\ -x+2y-e_2+a_2=2 \\ x\geq 0, y\geq 0, e_1\geq 0, e_2\geq 0 \\ a_1\geq 0, a_2\geq 0 \end{cases}$

$B=(a_1\ a_2)$; $A_B=I_2$; $A_B^{-1}.b=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\geq 0 \Rightarrow$ C'est une solution de base réalisable.

⊕ il faut exprimer la f°c objectif en f°c de variable hors base (x,y,e_1,e_2)

* $a_1=4+e_1+y-2x$
* $a_2=2+e_2-2y+x$

$Z_a=-(a_1+a_2)=-6-e_1-e_2+3y+x$

$\Rightarrow Z_a-x-y+e_1+e_2=-6$

$Z=4x+5y \Rightarrow Z-4x-5y=0$

$\begin{cases} \max\ x+y-e_1-e_2-6=Z_a \\ \underline{S.C} \\ 2x-y-e_1+a_1=4 \\ -x+2y-e_2+a_2=2 \\ Z_a-x-y+e_1+e_2+0.a_1+0.a_2=-6 \\ Z-4x-5y+0.e_1+0.e_2+0.a_1+0.a_2=0 \\ x\geq 0, y\geq 0, e_1\geq 0, e_2\geq 0, a_1\geq 0, a_2\geq 0 \end{cases}$

pivot

variable de modèle

e ↓

s →

	Z_a	Z	x	y	e_1	e_2	a_1	a_2	b
variable de base a_1	0	0	2	-1	-1	0	1	0	4
a_2	0	0	-1	2	0	-1	0	1	2
Z initial	0	1	-4	-5	0	0	0	0	0
Z_{aux}	1	0	-1	-1	1	1	0	0	-6

C_H (32) C_B

Scanné avec CamScanner

$B = (a_1, a_2)$ $\quad A_B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad X_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hookrightarrow$ Sol de base réalisable

$Z_a(X_B, X_H) = -6_1 \Rightarrow$ n'est pas optimale car les coefficients ne sont pas tous positifs $(C_H \geq 0)$

- on va chercher la variable entrante
- x et y ont la même suprct on va choisi comme entrée x.
- on choisie a_1 comme variable de sortie

(car $a_1 : 4/2 = 2 > 0$, $a_2 : 2/-1 = -2 < 0$)

pivot

	Z_a	Z	x	y ↓	e_1	e_2	a_1	a_2	b
x	0	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	0	2
a_2 →	0	0	0	3/2	-1/2	-1	1/2	1	4
Z	0	1	0	-7	-2	0	2	0	8
Z_a	1	0	0	-3/2	-3/2	1	3/2	0	-4

$L_1^{nouv} \leftarrow L_1^{ancien} / Pivot$

$L_2^{nouv} \leftarrow L_2^{ancien} + L_1^{nouv}$

$L_3^{nouv} \leftarrow L_3^{ancien} + 4 L_1^{nouv}$

$L_4^{nouv} \leftarrow L_4^{ancien} + L_1^{nouv}$

$B = (x, a_2) \quad H = (y, e_1, e_2, a_1)$

$x = 2 \quad y = 0 \quad e_2 = 0$

$a_2 = 4 \quad e_1 = 0 \quad a_1 = 0$

$\Rightarrow$ La valeur de Z_a au point $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ n'est pas optimale

$\Rightarrow$ La variable entrante y

$L_2^{nouv} \leftarrow L_2^{anc} / \frac{3}{2}$

$L_1^{nouv} \leftarrow L_1^{anc} + \frac{1}{2} L_2^{nouv}$

$L_4^{nouv} \leftarrow L_4^{anc} + \frac{3}{2} L_2^{nouv}$

$L_3^{nouv} \leftarrow L_3^{anc} + 7 L_2^{nouv}$

	Z_a	Z	x	y	e_1	e_2	a_1	a_2	b
x	0	0	1	0	-2/3	-1/3	2/3	1/3	10/3
y	0	0	0	1	-1/3	-2/3	1/3	2/3	8/3
Z	0	-1	0	0	-13/3	-14/3	13/3	14/3	80/3
Z_a	0	1	0	0	0	0	1	1	0

← (A)

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow B = (x, y)$, $H = (e_1, e_2, a_1, a_2)$

$x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{8}{3}$, $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$

$Z_a(x, y, e_1, e_2, a_1, a_2) = 0 = Z_a^*$

$\Rightarrow$ Cette valeur est optimale.

Remarque :

Après resolution du programme linéaire auxiliaire :

- si $Z_a^* > 0$: L'étape d'initialisation à echoué
- si $Z_a^* = 0$: 2 possibilité :
  - Tous les variable auxiliaire sont hors base avec valeur nulle. A ce moment on a un initialisation pour notre programme linéaire initial.
  - $\exists$ des variable auxiliaire avec valeur nulle qui sont dans la base. A ce moment on dit qu'il y a redondance a supprimer et on supprime le ligne (le contrainte) de la variable auxiliaire qui est dans la base et on recommence la resolution de PLA de nouveau.

Revenons à l'exercice on a $Z_a^* = 0$ est toute les variables auxiliaires est sans base : l'opération avec succès

En passe à la phase 2, on supprimons le colonne du variable auxiliaire et on supprimons la ligne de Z_a

(A)

Scanné avec CamScanner

	z	x	y	e_1	e_2	b
x	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
y	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
z	1	0	0	$-\frac{13}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{80}{3}$

↑ c'est le table initial

$B = (x, y)$ $H = (e_1, e_2)$ $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{8}{3}$ et $Z = \frac{80}{3}$

EX

$$\begin{cases} \max \; 3x_1 - x_2 \\ \text{s.c} \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \; , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

F.S $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2} \; 3x_1 - x_2 \\ \text{S.C} \quad -2x_1 - x_2 + e_1 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PLA $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1} (-a_1) \\ \text{S.C} \\ -2x_1 - x_2 + e_1 - a_1 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \; ; \; e_1 \geq 0, a_1 \geq 0 \\ e_2 \geq 0, \; e_3 \geq 0 \end{cases}$$

PLA $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1} (-a_1) \\ \text{S.C} \quad 2x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 2 \quad (1) \\ x_1 + 3x_2 + e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; e_1 \geq 0, \; e_2 \geq 0, \; e_3 \geq 0 \text{ et } a_1 \geq 0 \end{cases}$$

d'après (1) : $a_1 = 2 - 2x_1 - x_2 + e_1 \Rightarrow Z_a = -a_1 = -2 + 2x_1 + x_2 - e_1$

$Z = 3x_1 - x_2 \Rightarrow Z - 3x_1 + x_2 = 0$

$Z_a + 2x_1 - x_2 + e_1 = -2$

$B = (a_1, e_2, e_3)$

Scanné avec CamScanner

pivot ↘ e

s ⟷

	z_a	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	b
a_1	0	0	2	1	-1	0	0	1	2
e_2	0	0	1	3	0	1	0	0	2
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	4
z	0	1	-3	1	0	0	0	0	0
z_a	1	0	-2	-1	1	0	0	0	-2

Lecture du tableau : $B = (a_1, e_2, e_3)$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_2 \\ e_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $X_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z_a \cdot X = -2 \Longrightarrow$ n'est pas optimale car les coefficients ne sont tous ≥ 0

* e ⟶ x_2
S ⟶ a_1
pivot = 2

	z_a	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	b
x_1	0	0	1	1/2	-1/2	0	0	1/2	1
e_2	0	0	0	5/2	1/2	1	0	-1/2	1
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	4
z	0	1	0	5/2	-3/2	0	0	3/2	3
z_a	1	0	0	0	0	0	0	1	0

- $L_1^{nouv} \leftarrow L_1^{anc} / pivot$
- $L_2^{nouv} \leftarrow L_2^{anc} - L_1^{nouv}$
- $L_3^{nouv} \leftarrow L_3^{anc}$
- $L_4^{nouv} \leftarrow L_4^{anc} + 3L_1^{nouv}$
- $L_5^{nouv} \leftarrow L_5^{anc} + 2L_1^{nouv}$

Scanné avec CamScanner

Lecture du tableau :

$B = (x_1, e_2, e_3)$; $H = (x_2, e_1, a_1)$

$\begin{cases} Z_a^* = 0 \text{ et tous les coefficients sont } \geq 0 \\ a_1 \text{ hors base} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Le ~~(totale)~~ tableau final est une initialisation du tableau initiale

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
x_1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
e_2	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1
e_3	0	0	1	0	0	1	4
Z	1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	3

$B = (x_1, e_2, e_3)$; $H = (x_2, e_1)$

$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$e_1 = 0$
$e_2 = 1$
$e_3 = 4$

$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ n'est pas optimale car les coeff ne sont pas tous ≥ 0

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
x_1	0	1	3	0	1	0	2
e_1	0	0	5	1	2	0	2
e_3	0	0	1	0	0	1	4
Z	1	0	10	0	3	0	6

pivot $= \frac{1}{2}$

$L_2^{nouv} \leftarrow L_2^{anc} / \text{pivot}$

$L_1^{nouv} \leftarrow L_1^{anc} + \frac{1}{2} L_2^{nouv}$

$L_3^{nouv} \leftarrow L_3^{anc}$

$L_4^{nouv} \leftarrow L_4^{anc} + \frac{3}{2} L_2^{nouv}$

Scanné avec CamScanner

Interpretation :

$B = (x_1, e_1, e_3)$; $H = (x_2, e_2)$ $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $e_1 = 2$, $e_2 = 0$, $e_3 = 4$

$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = 6 \Rightarrow$ Solution optimale car les coefficient de Z sont tous ≥ 0

-6- Problème Primal/dual

Exemple :

une entreprise fabrique deux produit P_1 et P_2 en utilisant des ressource M_1 et M_2, l'activité est resumé sur le tableau suivant

	Produit P_1	Produit P_2	Qtité
M_1	2	3	12
M_2	6	4	15
Prix	10	5	

-1- Écrire le programme linéaire qui modélise l'activité de cette entreprise.

une entreprise 2 concurente à l'entreprise 1, Propose à l'entreprise 1 de lui vendre ses ressource (matiere premiere sans fabrication) en lui offrant un prix à déterminé. L'entreprise 1 ne veux ceder que avec un prix lui garantissant un gain superieur ou égale aux prix de vente comme produit finit.

-2- Modélisier le problème de l'entreprise 2.

Rq :

Le problème de l'entreprise 1 s'appelle **Primal**, et le problème de l'entreprise 2 s'appelle **dual**

Scanné avec CamScanner

$3y_1 + 4y_2 \geq 5.$

Chaque programme linéaire peut être vu de 2 ~~fonctions diff~~ angles différents et on peut déduire de l'un et d'autre en respectant les règles de passage qui sont le suivant :

Primal		Dual
$\max Z = C^T X$	$\Longleftrightarrow$	$\min W = b^T . y$
$\min Z = C^T X$	$\Longleftrightarrow$	$\max W = b^T . y$
variables	$\Longleftrightarrow$	contraintes
$x_i \geq 0$	$\Longleftrightarrow$	$\geq$
$x_i \in \mathbb{R}$	$\Longleftrightarrow$	$=$
$x_i \leq 0$	$\Longleftrightarrow$	$\leq$
contraintes	$\Longleftrightarrow$	variables
$\leq$	$\Longleftrightarrow$	$y_i \geq 0$
$=$	$\Longleftrightarrow$	y_i sans signe
$\geq$	$\Longleftrightarrow$	$y_i \leq 0$

Primal $\begin{cases} \max C^T . X \\ \text{s/c} \\ AX \leq b \quad \text{contrainte} \\ X \geq 0 \quad \text{variable} \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ Dual $\begin{cases} \min b^T y \\ A^T y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases}$

n: inconnu , m: contrainte — m: inconnu n: contraintes

Réponse :

* Identification :

+ Les variables de décision :

x_1 : le nbre des Produits P_1

x_2 : Le nbre des Produits P_2

+ La fct objectif :

$Z(x_1, x_2) = 10x_1 + 5x_2$

Scanné avec CamScanner

contraintes : • La qté utilisé de M_1 est inferieur à la qté utilisé disponible dans la stocke.

$2x_1 + 3x_2 \leqslant 12$

• La qté utilisé de M_2 est inferieur à la qté disponible dans la stocke.

$6x_1 + 4x_2 \leqslant 15$

Etape2 : Modèle mathématique

Primal

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2} \; 10x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ 6x_1 + 4x_2 \leqslant 15 \\ x_1 \geqslant 0 \;,\; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

* on suppose que l'entreprise 2 va offrir à l'entreprise 1 un prix y_1 par unité de la ressource M_1, et un prix y_2 par unité de la ressource M_2

* Le coût d'acquisition c'est le prix d'achat des ressources M_1 et M_2.

$W(y_1, y_2) = 12y_1 + 15y_2$ —> on cherche à minimiser $\{W(y_1, y_2)$

contraintes

• L'entreprise 1 impose que le prix de vente de matières primaires est pour produire une unité de P_1 soit $\geqslant$ au prix de vente d'une unité comme produit fini

$2y_1 + 6y_2 \geqslant 10$

• " " p_2 soit $\geqslant$ au prix " " "

Scanné avec CamScanner

$3y_1 + 4y_2 \geq 5.$

Dual

$$\begin{cases} \min\limits_{y_1,y_2} (12y_1 + 15y_2) = w(y_1,y_2) \\ \text{S.C:} \\ 2y_1 + 6y_2 \geq 10 \\ 3y_1 + y_2 \geq 5 \\ y_1 > 0,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

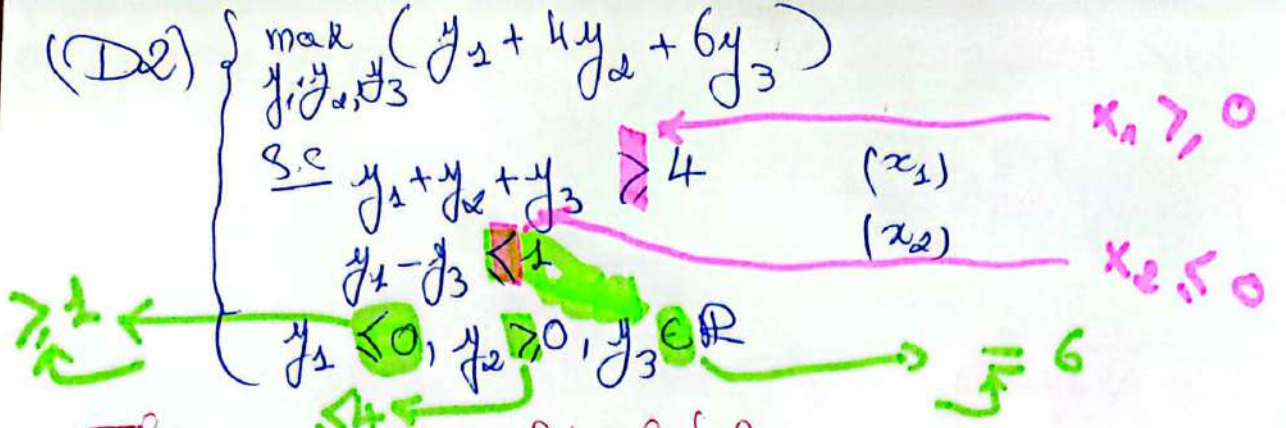
EX:

$$(P_1)\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} -3x_1 + x_2 \\ \text{S.C} \\ 2x_1 + x_2 = 0 \quad (y_1) \\ x_1 - x_2 \geq 2 \quad (y_2) \\ x_1 - x_2 \leq 4 \quad (y_3) \\ x_2 \geq 3 \quad (y_4) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_2):\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2} 4x_1 + x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + x_2 \geq 1 \quad (y_1) \\ x_1 \leq 4 \quad (y_2) \\ x_1 - x_2 = 6 \quad (y_3) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Identification

$$(D_2)\begin{cases} \min\limits_{y_1,y_2,y_3,y_4} (0\cdot y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 3y_4) \\ \text{S.C} \quad 2y_1 + y_2 + y_3 \geq -3 \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq 1 \quad (x_2) \\ y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \leq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner



Théorème de dualité faible

Soit x une sol° réalisable du Primal et y une sol° réalisable du Dual, alors $Z(X) \leq W(Y)$

on dit que le dual sa représente une borne sup de Primal

et le primal sa représente une borne inf de dual

$$\begin{cases} \max C^T X \\ \text{s.c} \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \min b^T Y \\ \text{s.c} \\ A^T Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

${}^t(A^T Y) \geq {}^t(C) \Leftrightarrow YA \geq {}^tC \longrightarrow W(Y) = Yb \geq YAX \geq {}^tCX = Z(X)$

Théorème de dualité forte

Soit x^* la sol° optimale de P et y^* la sol° optimale de D, Alors

$$Z(x^*) = W(y^*)$$

Relation entre Primal et Dual

Scanné avec CamScanner

— 1 . Lp'on la solution forte : $Z^* = W^* = 1650$

Primal

Dual	optimale	non-borné	incalculable
optimale	oui	Impossible	Impossible
non-borné	Impossible	Impossible	oui
incalculable	Impossible	ou	ou

$Z(X) \leq W(Y)$

Théorème des écarts complémentaire

A l'optimalité, on a : $\forall\ i = 1 \dots n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* = b_i \quad \text{ou} \quad y_i^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) = 0 \quad \text{ou} \quad y_i^* = 0$$

$\forall\ j = 1 \dots n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, y_i^* = C_i \quad \text{ou} \quad x_j^* = 0$$

Exercice :

Reprenons le dernier exemple, Donner son dual et déduire la sol° du dual à partir la solution du primal.

Reponse :

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 \\ \text{S.C} \\ \quad 2x_1 + x_2 \geq 2 \quad (y_1)\ (e_1) \\ \quad x_1 + 3x_2 \leq 2 \quad (y_2)\ (e_2) \\ \quad x_2 \leq 4 \quad (y_3)\ (e_3) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

D1 →

$$\begin{cases} \min\ 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ \text{S.C} \\ \quad 2y_1 + y_2 \geq 3 \quad (x_1) \quad f_1 \\ \quad y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -1 \quad (x_2) \quad f_2 \\ y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$B^* = (x_1, e_1, e_3) = (2, 2, 4)$

$H^* = (x_2, e_2) = (0, 0)$

$Z^* = 6$

theo des écarts comp :

$$\forall i = 1 \dots m \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* = b_i \ \text{ou}\ y_i^* = 0$$

$$e_i^* = 0 \quad \text{ou} \quad y_i^* = 0$$

Scanné avec CamScanner

D'après le théorème de dualité forte $Z^* = W^* = 6$

$\forall j = 1..n : \underbrace{\sum_{i=1} a_{ij} y_i^* = c_j}_{f_j^* = 0} \text{ ou } x_j^* = 0$

$e_1^* = 2 \Rightarrow y_1^* = 0$

$e_3^* = 4 \Rightarrow y_3^* = 0$

$x_1^* = 2 \Rightarrow f_1 = 0 \Rightarrow 2y_1^* + y_2^* = 3 \Rightarrow y_2^* = 3$ ($y_1^* = 0$)

$y_1^* = 0 ; y_2^* = 3 ; y_3^* = 0$ et $W^* = 6$

Exercice :

$\begin{cases} \max (20x_1 + 10x_2) \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \ (y_1) \ (e_1) \\ x_1 + x_2 \leq 100 \ (y_2) \ (e_2) \\ x_1 \leq 70 \ (y_3) \ (e_3) \\ x_2 \leq 50 \ (y_4) \ (e_4) \\ x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 \end{cases}$

Donner son duale et déduire la sol° du duale à partir de la solution du primal.

$\begin{cases} \min_{y_1, y_2, y_3, y_4} (120y_1 + 100y_2 + 70y_3 + 50y_4) \\ \text{S.C} \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 20 \ (x_1) \\ 2y_1 + y_2 + y_4 \geq 10 \ (x_2) \\ y_1 \geq 0 , y_2 \geq 0 , y_3 \geq 0 , y_4 \geq 0 \end{cases}$

$B^* = (x_2, e_2, x_1, e_4) = (25, 5, 70, 25)$

$H = (e_1, e_3) = (0, 0)$ et $Z^* = 1650$

Scanné avec CamScanner

D'après théo de dualité forte : $Z^* = W^* = 1650$

* $x_1^* = 70 \Leftrightarrow y_1^* + y_2 + y_3^* = 20$
* $x_2^* = 25 \Leftrightarrow 2y_1 + y_2 + y_4 = 10$

$e_1^* = 0$
$e_2^* = 5 \Rightarrow y_2^* = 0$
$e_3^* = 0$
$e_4^* = 25 \Rightarrow y_4^* = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1^* + y_3^* = 20 \\ 2y_1 = 10 \\ y_4^* = 0,\ y_2^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 5 \\ y_2^* = 0 \\ y_3^* = 15 \\ y_4^* = 0 \\ W^* = 1650 \end{cases}$$

Exercice :
on va reprendre, l'exemple de l'entreprise 1 et son concurrent l'entreprise 2. ① Donner le prog primale et resoudre. ② Donner le duale et déduire sa sol° ③ De combien on peut varier le prix de vente p2 en gardant la même stratégie de production. ④ De combien on peut varier le stock de H_1 en gardant la même stratégie de fabrication.

Reponse :

$$P \begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2} (10x_1 + 5x_2) \\ \text{S.C} \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \quad (y_1) \\ 6x_1 + 4x_2 \leqslant 15 \quad (y_2) \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

F.S $\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} 10x_1+5x_2 \\ \text{S.C} \\ 2x_1+3x_2+e_1=12 \\ 6x_1+4x_2+e_2=15 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ e_1\geq 0,\ e_2\geq 0. \end{cases}$

$B=(e_1,e_2)$

$A_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A_B^{-1}\cdot b = X_b=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}\geq 0$ Réalisable

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
e_1	0	2	3	1	0	12
S ↔ e_2	0	6	4	0	1	15
Z	1	-10	-5	0	0	0

$L_2^{nouv} \leftarrow L_2^{anc}/pivot$

$L_1^{nouv} \leftarrow L_1^{anc} - 2L_2^{nouv}$

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
e_1	0	0	5/3	1	-1/3	7
x_1	0	1	2/3	0	1/6	15/6
Z	1	0	5/3	0	5/3	25

$\Rightarrow$ Sol^{n} optimale

$B^* = (e_1, x_1) = (7, \frac{15}{6})$

$H = (x_2, e_2) = (0,0)$

$\Rightarrow Z^* = 25$

D : $\begin{cases} \min\limits_{y_1,y_2} (12y_1+15y_2) \\ \text{S.C} \\ 2y_1+6y_2 \geq 10 \quad (x_1) \\ 3y_1+4y_2 \geq 5 \quad (x_2) \\ y_1\geq 0,\ y_2\geq 0 \end{cases}$

Résolution :

D'après la théo de dualité forte : $Z^* = W^* = 25$

$B^* = (e_1, x_1) = (7, \frac{15}{6})$

$H = (x_2, e_2) = (0,0)$

Scanné avec CamScanner

Méthode de Simplex Duale

Remarque :

Ce que on a vu jusqu'a maintenant s'appelle la méthode de Simplex primal qui consiste à se déplacé d'une base réalisable à une autre jusqu'a l'optimalité. La méthode de simplex duale consiste à se déplacer d'une base optimale à une autre jusqu'à une base réalisable.

Description de l'algorithme simplex Duale :

Considerons une programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{S.C} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; i = 1..m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1..n \end{cases} \leftarrow \underline{\text{F.C}}$$

Forme Canonique

la forme standard

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i=1..m \\ x_j \geq 0 \ (j=1..n) \quad x_{n+i} \geq 0 \ (i=1..m) \end{cases}$$

x_{n+i} : variable d'écart

Primal

$$(D)\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_{n+i} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_{n+i} \geq c_j \ (j=1..n) \\ y_{n+i} \geq 0 \quad i=1..m \end{cases} \leftarrow \underline{\text{F.C}}$$

c_j (variable)

Scanné avec CamScanner

la forme standard :

Dual

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_{n+i} \\ \text{s.c} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{n+i} - y_j = c_j \quad (j=1..n) \\ y_{n+i} \geq 0, \; i=1..m \qquad y_j \geq 0 \quad j=1..n \end{cases}$$

y_j : variable d'excès

Primal		Dual
$\theta = (x_1 \dots x_n)$	$\longleftrightarrow$	$e = (y_1 \dots y_n)$
$e = (x_{n+1} \dots x_{n+m})$	$\longleftrightarrow$	$\theta = (y_{n+1} \dots y_{n+m})$

Ecart complementaire

$V_{\theta_P} \cdot V_{e_D} = 0$	$V_{e_P} \cdot V_{\theta_D} = 0$
$x_1 \cdot y_1 = 0$	$x_{n+1} \cdot y_{n+1} = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$x_n \cdot y_n = 0$	$x_{n+m} \cdot y_{n+m} = 0$

Soit B une base réalisable pour le programme primal c-à-d A_B existe et A_B^{-1} best positive

on va écrire le programme P relative à la base B.

Cette écriture c'est le dictionnaire P

~~$A = (A_B \; A_N)$~~ $A = (A_B \; A_N) = (A_B \; A_H)$

Scanné avec CamScanner

nouvelle hors base / nouv

En utilisant $AX = b = A_B \cdot X_B + A_N \cdot X_N = b$

$$\Rightarrow X_B = A_B^{-1}(b - A_N X_N) = A_B^{-1} b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot X_N$$

$$= \bar{b} - \bar{A} X_N$$

$\bar{Z}$ +

$$Z = C^T X = (C_B \; C_N)^T X = C_B^T X_B + C_N^T X_N$$

$$= C_B^T (b - \bar{A} X_N) + C_N^T X_N = C_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N X_N) + C_N^T X_N$$

$$= C_B^T A_B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N) X_N$$

$$= \bar{Z} + C_N^T X_N$$

$x_i =$ Dictionnaire du Primal dans la base (B, N)

$=$

$$\begin{cases} \max Z = \max \bar{Z} + \bar{C}_N^T \cdot X_N \\ \text{S.C} \\ X_B = \bar{b} - \bar{A} X_N \\ X_B \geq 0, \; X_N \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max \bar{Z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \quad \leftarrow \text{Dictionnaire} \\ \text{S.C} \\ x_i = b_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \; ; \; i \in B \\ x_i \geq 0, \; i \in B \quad x_j \geq 0 \quad j \in N \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \; ; \; i \in (B \cup N)$

- L'algo. du simplexe Primal est constitué par 3 étapes :

1. Selection de la variable entrante :

- Choisir $j \in N$ tel que x_j c'est le candidat le plus favorisé (des valeurs 0 hors base)

Scanné avec CamScanner

Rq : • Si $\bar{C}_j \leq 0$ $(j \in N)$ $\Rightarrow$ La base est optimale (arrêt)

• Sinon (c-à-d : $\bar{C}_j > 0$: je veux sélectionné la variable entrante, on choisi $\bar{C}_e = \max\{\bar{C}_j ;\ \bar{C}_j > 0,\ j \in N\}$

$\Rightarrow x_e$ c'est la variable entrante dans la base B

-2- Selection de la variable sortante : x_s ← c'est la premier variable à s'annule lorsque on fait augmenté x_e

fixe — fixe — variable

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$$

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N/e} \bar{a}_{ij} x_j - \bar{a}_{ie} x_e$$

• si $\bar{a}_{ie} < 0$ $(i \in B)$ problème non borné

• sinon $(\bar{a}_{ie} > 0)$

$$x_e = \frac{b_i}{\bar{a}_{ie}} - \sum_{j \in N/e} \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{ie}} x_j - \frac{1}{\bar{a}_{ie}} x_i$$

$$\Rightarrow s = \operatorname{argmin}\left\{\frac{b_i}{\bar{a}_{ie}} ;\ i \in B ;\ \bar{a}_{ie} > 0\right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_s}{\bar{a}_{se}} = \min\left\{\frac{b_i}{\bar{a}_{ie}},\ i \in B ;\ \bar{a}_{ie} > 0\right\}$$

-3- Pivotage :

$B^{nouv} = B^{anc} \setminus s \cup e$

$N^{nouv} = N^{anc} \setminus e \cup s$ (moins)

Hors base

Après il faut réecrire Z en fonction des variable de la

Scanné avec CamScanner

nouvelle hors base N^{nouv}.

En utilisant, $x_e = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} - \sum_{j \in N/e} \frac{\bar{a}_{sj}}{\bar{a}_{se}} x_j - \frac{1}{\bar{a}_{se}} x_s$

$$\bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j = \bar{z} + \sum_{j \in N/e} \bar{c}_j x_j + \bar{c}_e x_e$$

$$= \bar{z} + \sum_{j \in N/e} \bar{c}_j x_j + \bar{c}_e \left(\frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} - \sum_{j \in N/e} \frac{\bar{a}_{sj}}{\bar{a}_{se}} x_j - \frac{1}{\bar{a}_{se}} x_s \right)$$

$$= \left(\bar{z} + \bar{c}_e \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} \right) + \sum_{j \in N/e} \left(\bar{c}_j - \frac{\bar{a}_{sj}}{\bar{a}_{se}} \right) x_j - \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{se}} x_s$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \; ; \; i \in B$$

$$= \bar{b}_i - \sum_{j \in N/e} \bar{a}_{ij} x_j - \bar{a}_{ie} x_e \; ; \; i \in B/s$$

c'est la programme simplex primal

Dictionnaire du duale dans la base (B, N)

↑ base réalisable du Primal

$$\begin{cases} \min \bar{z} + \sum_{i \in B} \bar{b}_i y_i \\ \text{s.c} \\ y_j = -\bar{c}_j + \sum_{i \in B} \bar{a}_{ij} y_i \quad j \in N \\ \qquad\qquad i \in B \cup N \\ y_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min Yb \\ \text{s.c} \\ YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

- 1 - Selection des variables sortante

• si $\bar{b}_i \geq 0$: dual optimal $\longrightarrow$ arrêt

• Sinon $(\exists \bar{b}_i < 0)$ la variable sortante

$$s = \arg\min \{ \bar{b}_i , \bar{b}_i < 0 \}$$

- 2 - Selection de la variable entrante (le plus petit négative)

$\forall j \in \mathbb{N}$: $y_j = -\bar{c}_j$ et $\forall i \in B$ $y_i = 0$

$-\bar{c}_j \geq 0 \Leftrightarrow \bar{c}_j \leq 0$

si $\bar{c}_j \geq 0 \ (j \in \mathbb{N}) \Rightarrow$ pb non réalisable

$y_j = -\bar{c}_j + \sum_{i \in B/s} \bar{a}_{ij} y_j + \bar{a}_{sj} y_s$

$\Rightarrow y_s = \frac{y_j}{\bar{a}_{sj}} + \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}} - \sum_{i \in B/s} \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{sj}}$

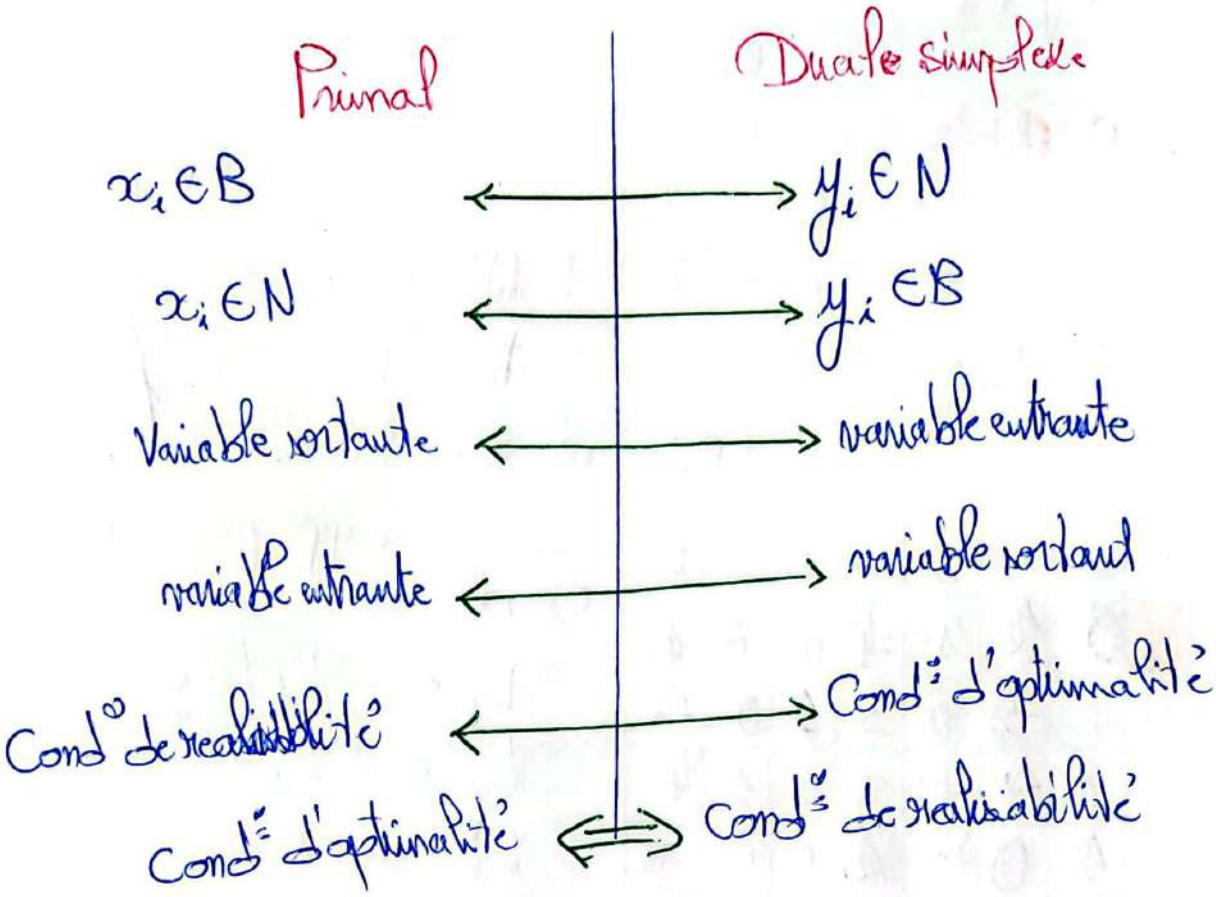
si $a_{sj} \geq 0$ pb non bornée

$$y_j = -\bar{c}_j + \sum_{i \in B/s} \bar{a}_{ij} y_j + \bar{a}_{sj} y_s$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{y_j}{\bar{a}_{sj}} + \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}} - \sum_{i \in B/s} \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{sj}}$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{y_j}{\bar{a}_{sj}} + \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}} \Rightarrow e = \arg\min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}} ; \bar{a}_{sj} < 0 \right\}$$

Scanné avec CamScanner



Pour appliquer l'alg idéal simplex, on va tracer le tableau du Programme Primal, mais les règle seront les règles du duale simplexe

-1- sélection de la variable sortante, en regardons les b_i la plus petite négative. on va régardons les variable entrante

si $\bar{a}_{sj} \geq 0$ pb non borné et pour sélection la variable entrante on va chercir $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}}$ avec $\bar{a}_{sj} < 0$, ensuite on va faire la pivotage

Exp:

$$\begin{cases} \max -3x_1 - x_2 \\ \text{S.C} \\ -2x_1 - x_2 \leq -2 \quad (x_1 + x_2 \geq 2) \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	Z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
e_1	0	-2	-1	1	0	-2
e_2	0	1	3	0	1	2
Z	1	-3	1	0	0	0

Scanné avec CamScanner

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	0	-2	-1	1	0	0	-2
e_2	0	1	3	0	1	0	2
e_3	0	0	1	0	0	1	4
z	1	+3	1	0	0	0	0

$B = (e_1, e_2, e_3)$

$N = (x_1, x_2)$

(B,N) n'est pas primal réalisable

$Cont = A_B^{-1} \cdot b = I_3 \cdot b \not\geq 0$

(B,N) est dual réalisable car $C_N = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0$

→ on va appliquer simplex Dual. ok

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
x_2	0	1/2	1	-1/2	0	0	1
e_2	0	5/2	0	1/2	1	0	1
e_3	0	0	1	0	0	1	4
z	1	3/2	0	3/2	0	0	-3

$L_1 \leftarrow L_1 / -2$

$L_2^n \leftarrow L_2^a - L_1^n$

$L_3^n \leftarrow L_3^a - 3L_1^n$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow b \geq 0 \Rightarrow$ dual optimal

$z^* = -3, \; x_1^* = 1, \; x_2^* = 0, \; e_1^* = 0, \; e_2^* = 1, \; e_3^* = 4$

EX :

Soit (P) :
$$\begin{cases} \min \; 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{S.C} \\ \quad 3x_1 - 11x_2 + x_3 \geq 4 \\ \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

-1- Forme canonique

-2- Forme standard

-3- Base optimale réalisable evidente ?

-4- le dual de la forme canonique.

-5- Résoudre

-6- Déduire le sol^{n} du duale.

Scanné avec CamScanner

Réponse :

-1- F.C :

$$\begin{cases} \max -4x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{S.C} \\ -3x_1 + 11x_2 - x_3 \geq -4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

-2- F.S

$$\begin{cases} \max -4x_1 - x_2 - x_3 + 0e_1 + 0e_2 \\ \text{S.C} \\ -3x_1 + 11x_2 - x_3 + e_1 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + e_2 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

-3- $B = (e_1, e_2)$ $H = (x_1, x_2, x_3)$

$A_B^{-1} . b = I_2 . b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \not\geq 0 \Rightarrow$ La base n'est pas primal réalisable

-4- Le Dual de la forme standard : (D)

$$\begin{cases} \min -4y_1 + 3y_2 \\ -3y_1 + y_2 \geq -4 \\ 11y_1 - 3y_2 \geq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

-5-

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b
e_1	0	-3	11	-1	1	0	-4
e_2	0	1	-3	2	0	1	3
Z	1	4	1	1	0	0	0

. La variable sortante : $s = \text{argmin}\{b_i, b_i < 0\} = \text{arg min}\{-4, 3\} = -4$

. La variable entrante : $e = \text{arg min}\left\{\frac{4}{-3}, \frac{1}{-1}\right\} = -\frac{4}{3}$

$L_1^n \leftarrow L_1^a / 3$

$L_2^n \leftarrow L_2^a - L_1^n$

$L_3^n \leftarrow L_3^a - 4L_1^n$

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b
x_1	0	1	$-\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
e_2	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$
Z	1	0	$\frac{47}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{16}{3}$

Scanné avec CamScanner

~~Remarque~~

$b \geq 0$ ($\Rightarrow$ La sol° courante est Duale optimale

$Z^* = \frac{-16}{3}$, $x_1^* = \frac{4}{3}$, $e_2^* = \frac{5}{3}$, $e_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$

- 6 - . Théorème de dualité forte: $Z^* = W^* = \frac{-16}{3}$

. Théorème des écarts complémentaires :

$x_1^* = \frac{4}{3} \Rightarrow -3y_1 + y_2 = -4$

$e_2^* = \frac{5}{3} \Rightarrow y_2^* = 0$

$e_1^* = 0$

$x_2^* = 0$

$y_1^* = \frac{4}{3}$ et $y_2^* = 0$

* Remarque

pour résoudre un P.L on possède comme suit (3 étape) :

Étape 1 : si on a une Base initiale P réalisable, on utilise Simplex Primale (primal) sinon on passe à l'étape 2.

Étape 2 : si on a une Base initiale D réalisable, on utilise Simplex Duale. si on n'

Étape 3 : si on n'a pas une Base initiale P et on n'a pas une Base initiale D, on utilise simplex à 2 phases et on commence par la phase 1 : PLA

Scanné avec CamScanner